

$$ax + b = z^2$$

**Théorème 1a**

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls,  $ax + b$  est carré parfait si et seulement s'il existe au moins un entier  $\delta = \sqrt{a^2 - 4b_0 - 4|a|k}$

où  $k = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

et  $b_0 = a \left[ \frac{b}{a} \right] - b$ ,  $\left[ \frac{b}{a} \right]$  représente la partie entière de

$\frac{b}{a}$

Pour chaque entier  $\delta$ , les solutions entières de cette équation sont :

$$z_1 = \pm \left( |a|n + \frac{|a| - \delta}{2} \right), \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$x_1 = \frac{z_1^2 - b}{a}$$

$$z_2 = \pm \left( |a|n + \frac{|a| + \delta}{2} \right),$$

$$x_2 = \frac{z_2^2 - b}{a}$$

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, pour résoudre l'équation  $ax + b = \text{carré parfait}$  (où x doit aussi être un entier) :

1. on calcule d'abord l'entier  $b_0 = a \left[ \frac{b}{a} \right] - b$  où  $\left[ \frac{b}{a} \right]$  représente la partie entière de  $\frac{b}{a}$ .
  2. ensuite on calcule l'ensemble des valeurs positives, si elles existent, de  $\Delta = a^2 - 4b_0 - 4|a|k$  en commençant pas  $k=0, k=1, k=2 \dots$  ainsi de suite jusqu'à ce que la valeur de  $\Delta$  soit négative.
- Si aucune valeur de  $\sqrt{\Delta}$  n'est un nombre entier, alors  $ax + b$  n'est pas un carré parfait.
  - Si au moins une valeur de  $\sqrt{\Delta}$  est un nombre entier, alors  $ax + b = z^2$  admet un nombre infini de solutions.

**Remarques**

- $b_0 < |a|$  ;
- $\delta \leq |a|$ , (si  $\delta = a$ , alors  $z_1 = z_2 = |a|n$ ) ;
- Si  $ax + b$  est carré parfait, alors le nombre de solutions est infini ;

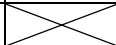
- Pour chaque entier  $\delta$ , les solutions  $z$  forment des suites arithmétiques de raison  $|a|$  et de premiers termes  $(|a| - \delta)/2$  pour  $z_1$  et  $(|a| + \delta)/2$  pour  $z_2$ .

### Exemples

1. Calculer l'ensemble des entiers  $x$  pour que  $17x - 11$  soit carré parfait.

$$b_0 = 17[(-11) / 17] - 11 = 17 \times 0 - 11 = -11$$

$$\Delta = 17^2 + 44 - 68k = 333 - 68k \quad (k \in \mathbb{N})$$

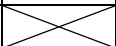
$k =$	0	1	2	3	4	$> 4$
$\Delta =$	333	265	197	129	61	$< 0$
$\delta = \sqrt{\Delta} =$	$\notin \mathbb{N}$					

Aucune valeur de  $\delta$  n'appartient à  $\mathbb{N}$ , donc il n'existe pas d'entier  $x$  tel que  $17x - 11 =$  carré parfait.

2.  $7x + 28$  peut-il être carré parfait ?

$$b_0 = 7[28 / 7] - 28 = 0$$

$$\Delta = 7^2 - 0 - 28k = 49 - 28k, \quad (k \in \mathbb{N})$$

$k =$	0	1	$> 1$
$\Delta =$	49	21	$< 0$
$\delta = \sqrt{\Delta} =$	7	$\notin \mathbb{N}$	

$$\delta = 7$$

$$\delta = a \text{ donc } z_1 = z_2 = an.$$

$$z = 7n, \quad x = \frac{(7n)^2 - 28}{7} = 7n^2 - 4$$

$$7x + 28 \text{ est carré parfait si } x = 7n^2 - 4, \quad (n \in \mathbb{N})$$

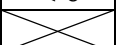
$\delta = 7$	$n =$	0	1	2	...
	$z =$	0	7	14	
	$x =$	-4	3	24	

L'ensemble des solutions est  $S = \{-4; 3; 24; 59; 108; 171; 248; 339; 444; \dots\}$

3. Calculer l'ensemble des solutions de  $-8x + 33 = z^2$ .

$$b_0 = -8[33 / (-8)] - 33 = -1$$

$$\Delta = (-8)^2 + 4 - 32k = 68 - 32k, \quad (k \in \mathbb{N})$$

$k =$	0	1	2	$> 2$
$\Delta =$	68	36	4	$< 0$
$\delta = \sqrt{\Delta} =$	$\notin \mathbb{N}$	6	2	

$$\delta = \sqrt{\Delta} = \{2; 6\}$$

$\delta = 6$	n =	0	1	2	...
	z <sub>1</sub> =	1	9	17	
	x <sub>1</sub> =	4	-6	-32	
	z <sub>2</sub> =	7	15	23	
	x <sub>2</sub> =	-2	-24	-62	

$\delta = 2$	n =	0	1	2	...
	z <sub>1</sub> =	3	11	19	
	x <sub>1</sub> =	3	-11	-41	
	z <sub>2</sub> =	5	13	21	
	x <sub>2</sub> =	1	-17	-51	

L'ensemble des solution est  $S = \{... -62; -51; -41; -32; -24; -17; -11; -6; -2; 1; 3; 4\}$

---

Ce document est un texte original. Merci de faire référence à ce site ou son auteur lorsque vous citez ses formules ou partie de son contenu.