Accueil

$ax + b = z^2$

Théorème 1a

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, $ax + b$ est carré parfait si et seulement s'il existe au moins un entier $\delta = \sqrt{a^2 - 4b_0 - 4|a|k}$

où $k = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

et $b_0 = a\left[\frac{b}{a}\right] - b$, ($\left[\frac{b}{a}\right]$ représente la partie entière de $\frac{b}{a}$)

Pour chaque entier δ, les solutions entières de cette équation sont :

$z_1 = \pm\left(|a|n + \frac{|a|-\delta}{2}\right)$, $(n \in \mathbb{N})$ $\qquad x_1 = \frac{{z_1}^2 - b}{a}$

$z_2 = \pm(|a|n + \frac{|a|+\delta}{2})$, $\qquad x_2 = \frac{{z_2}^2 - b}{a}$

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, pour résoudre l'équation $ax + b =$ carré parfait (où x doit aussi être un entier) :

1. on calcule d'abord l'entier $\mathbf{b_0 = a\left[\frac{b}{a}\right] - b}$ où $\left[\frac{b}{a}\right]$ représente la partie entière de $\frac{b}{a}$.
2. ensuite on calcule l'ensemble des valeurs positives, si elles existent, de $\Delta = \mathbf{a^2 - 4b_0 - 4|a|k}$ en commençant pas k=0, k=1, k=2… ainsi de suite jusqu'à ce que la valeur de Δ soit négative.

- Si aucune valeur de $\sqrt{\Delta}$ n'est un nombre entier, alors $ax + b$ n'est pas un carré parfait.
- Si au moins une valeur de $\sqrt{\Delta}$ est un nombre entier, alors $ax + b = z^2$ admet un nombre infini de solutions.

Remarques

- $b_0 < |a|$;
- $\delta \leq |a|$, (si $\delta = a$, alors $z_1 = z_2 = |a|n$) ;
- Si $ax + b$ est carré parfait, alors le nombre de solutions est infini ;

- Pour chaque entier δ, les solutions z forment des suites arithmétiques de raison $|a|$ et de premiers termes $(|a| - \delta)/2$ pour z_1 et $(|a| + \delta)/2$ pour z_2.

Exemples

1. Calculer l'ensemble des entiers x pour que 17x - 11 soit carré parfait.

   $b_0 = 17[(-11) / 17] - 11 = 17 \times 0 - 11 = -11$
   $\Delta = 17^2 + 44 - 68k = 333 - 68k \ (k \in \mathbb{N})$

$k =$	0	1	2	3	4	> 4
$\Delta =$	333	265	197	129	61	< 0
$\delta = \sqrt{\Delta} =$	$\notin \mathbb{N}$					

   Aucune valeur de δ n'appartient à $\mathbb{N}$, donc il n'existe pas d'entier x tel que 17x - 11 = carré parfait.

2. 7x + 28 peut-il être carré parfait ?

   $b_0 = 7[28 / 7] - 28 = 0$
   $\Delta = 7^2 - 0 - 28k = 49 - 28k, \ (k \in \aleph)$

$k =$	0	1	> 1
$\Delta =$	49	21	< 0
$\delta = \sqrt{\Delta} =$	7	$\notin \mathbb{N}$	

   $\delta = 7$
   $\delta = a$ donc $z_1 = z_2 = an$.
   $z = 7n \, , x = \frac{(7n)^2 - 28}{7} = 7n^2 - 4$
   7x + 28 est carré parfait si $x = 7n^2 - 4, \ (n \in \mathbb{N})$

$\delta = 7$	$n =$	0	1	2	...
	$z =$	0	7	14	
	$x =$	-4	3	24	

   L'ensemble des solutions est S = {-4; 3; 24; 59; 108; 171; 248; 339; 444; ...}

3. Calculer l'ensemble des solutions de $-8x + 33 = z^2$.

   $b_0 = -8[33 / (-8)] - 33 = -1$
   $\Delta = (-8)^2 + 4 - 32k = 68 - 32k, \ (k \in \mathbb{N})$

$k =$	0	1	2	> 2
$\Delta =$	68	36	4	< 0
$\delta = \sqrt{\Delta} =$	$\notin \mathbb{N}$	6	2	

$\delta = \sqrt{\Delta} = \{2; 6\}$

$\delta = 6$	$n =$	0	1	2	…
	$z_1 =$	1	9	17	
	$x_1 =$	4	-6	-32	
	$z_2 =$	7	15	23	
	$x_2 =$	-2	-24	-62	

$\delta = 2$	$n =$	0	1	2	…
	$z_1 =$	3	11	19	
	$x_1 =$	3	-11	-41	
	$z_2 =$	5	13	21	
	$x_2 =$	1	-17	-51	

L'ensemble des solution est S = {… -62; -51; -41; -32; -24; -17; -11; -6; -2; 1; 3; 4}